Bilješka o Boškovićevu razlikovanju dviju vrsta brzina

Kožnjak, Boris

Source / Izvornik: **Prolegomena : Časopis za filozofiju, 2003, 2, 61 - 71**

Journal article, Published version
Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

Bilješka o Boškovićevu razlikovanju dviju vrsta brzina

BORIS KOŽNJAK

Zavod za povijest, filozofiju i sociologiju znanosti
Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički odsjek
Bijenička cesta 32, HR-10 000 Zagreb
bkoznjak@phy.hr

Pregledni članak
Primljeno: 24–03–03 Prihvaćeno: 28–04–03

SAŽETAK: Boškovićevo razlikovanje dviju vrsta brzina (*duo velocitatum genera*) – brzine u prvom ozbiljenju (*velocitas in actu primo*), odnosno, potencijalne brzine (*velocitas potentialis*) i brzine u drugom ozbiljenju (*velocitas in actu secundo*), odnosno, aktualne brzine *(velocitas actualis*) – promišlja se u odnosu na koncept trenutne brzine kako je definira *calculus differentialis*. Nasuprot naizglednoj nedosljednosti Boškovićeve dualnosti brzina i koncepta trenutne brzine, tragom kritičkoga promišljanja logičkih i metodoloških temelja *calculusa* u članku se pokazuje kako je dualnost brzina dosljedna tumačenjima trenutne brzine koje daju Oresme, Euler i Maclaurin, kao i definiciji trenutne brzine temeljem strogog cauchyjevskog utemeljenja *calculusa*. Boškovićeva dualnost brzina također je pokazana dosljednom aristotelijansko-skolastičkom nauku o možnosti i zbiljnosti, posebno u onoj njegovoj domeni koja se odnosi na narav neprekinutoga gibanja.

KLJUČNE RIJEČI: Bošković, brzina u prvom ozbiljenju (*velocitas in actu primo*), potencijalna brzina (*velocitas potentialis*), brzina u drugom ozbiljenju (*velocitas in actu secundo*), aktualna brzina (*velocitas actualis*), Aristotel, možnost, zbiljnost, gibanje, diferencijalni račun, trenutna brzina.

Prema Boškoviću, valja nam razlikovati dvije vrste brzina (*duo velocitatum genera*): brzinu u prvom ozbiljenju (*velocitas in actu primo*) i brzinu u drugom ozbiljenju (*velocitas in actu secundo*), kako ih nazivlje u *De viribus vivis* iz 1745.[1] i *De continuitatis lege* iz 1754,[2] odnosno, potencijalnu brzinu (*velocitas potentialis*) i aktualnu brzinu *(velocitas actualis*), kako ih nazivlje u

[1] Bošković (1745), Num. 11–13.
[2] Bošković (1996), Num. 35, str. 40–43.

Theoria philosophiae naturalis iz 1758. godine.[3] Brzinu *in actu secundo*, odnosno aktualnu brzinu Bošković definirana kao "neki odnos u jednolikom gibanju, a taj je dan pređenim razmakom podijeljenim onim vremenom u kojem je taj razmak prijeđen",[4] dok brzinu *in actu primo*, odnosno potencijalnu brzinu definira kao "sklonost (*determinatio*) prema aktualnoj brzini, odnosno, sklonost koju posjeduje gibajuće se tijelo, ako ga nikakva sila ne navodi na promjenu, da jednolikim gibanjem prijeđe neku određenu udaljenost u neko određeno vrijeme".[5] Međutim, dok aktualna brzina "ne može postojati pri trenutku vremena (*haberi non potest momento temporis*), već traži neprekinuto vrijeme u kojem se odvija gibanje, a također traži i jednoliko gibanje da bi se mogla točno izmjeriti", potencijalna je brzina "determinirana svakim trenutkom, i na nju misle mehaničari kada prave geometrijske grafikone za bilo koje nejednoliko gibanje".[6] Neka nam sljedeći jednostavan primjer posluži za dodatno pojašnjenje ovog Boškovićevog razlikovanja. Naime, prema prvom Newtonovom zakonu, svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu, osim ako zbog djelovanja vanjskih sila ne promijeni svoje stanje (*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformer in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare*). Ukoliko se, dakle, tijelo giblje po krivulji, tada na nj djeluje sila. Ukoliko sila, međutim, prestane djelovati u trenutku kada je tijelo pri točki T krivulje, tada ono napušta krivulju i giba se po tangenti povučenoj na krivulju pri točki T. Ovo gibanje, nakon 'iskapčanja' tijela pri točki T, jednoliko je gibanje čija se *aktualna* brzina može mjeriti i izračunati temeljem jednostavnog izraza $v = s/t$, gdje je s prijeđeni put, a t vrijeme u kojem je taj put prijeđen, a koja nije "ništa drugo do li sama sila tromosti (*vis inertiae*), određena prethodnim okolnostima".[7] Ova pak je aktualna brzina jednaka 'brzini' tijela pri točki T, koju Bošković naziva *potencijalnom*.

Boškovićevo razlikovanje dviju vrsta brzina, iako zamjećeno i promišljeno od suvremenih tumača njegova djela, posebno u dijelu koji se odnosi na hipotezu o 'potencijama' i problem nastanka brzine,[8] u ovoj bilješci želimo promisliti u ozračju dvije dodatne poteškoće njezina razumijevanja. Prije svega, problem predstavlja naizgledna pojmovna proturječnost samog koncepta potencijalne brzine,[9] budući je brzina *per definitionem* prelaženje nekoga puta u jedinici vremena, te tako pretpostavlja samo gibanje. Gibanje pak je uvijek nekakvo ozbiljenje, kako to već postavlja Aristotel, vežući zbilj-

[3] Bošković (1974), Num. 64, str. 28–29.
[4] Ibid., str. 28.
[5] Ibid., str. 29.
[6] Ibid.
[7] Bošković (1745), Num. 12.
[8] Marković (1968), str. 180; Kutleša (1994), str. 279–283; Čuljak (1992), str. 66–73.
[9] Na ovu poteškoću upućuje Talanga; vidi bilješku 82 u Bošković (1996), str. 203.

nost (ἐνέργεια) u svome primarnome značenju upravo uz samo gibanje (ἐνέργεια κατὰ κίνησιν), štoviše, smatrajući da je upravo ἐνέργειαν ponajviše samo gibanje (κίνησις)".[10] Drugo, a na određeni način povezano s prvom poteškoćom, postavlja se i pitanje o dosljednosti Boškovićeve modalnosti brzina s konceptom *trenutne brzine* (brzine 'pri trenutku'; *Momentangeschwindigkeit*; *instantaneous velocity*) koju *calculus differentialis*, do kojeg Newton upravo i dolazi razmatrajući problem brzine, jednoznačno pripisuje gibajućem tijelu (što preuzimlje klasična mehanika kao jednu od svojih temeljnih pretpostavki). Prva se poteškoća želi razriješiti unutar aristotelijansko-skolastičkoga nauka o možnosti i zbiljnosti, pokazujući kako je Boškovićevo razlikovanje dviju brzina dosljedno ovome nauku, a posebno onoj njegovoj domeni koja se odnosi na narav neprekinutoga gibanja. No, ovo filozofijsko (točnije, metafizično) razrješenje još uvijek traži svoje matematsko opravdanje. Postavljajući tako ovo pitanje, valjat će nam kritički promisliti same konceptualne temelje *calculusa*,[11] kojeg je Voltaire opisao kao "umijeće točnog brojanja i mjerenja onih stvari čije postojanje ne može biti pojmljeno".[12] Ovo bi pak promišljanje, koje ne dvoji u intelektualnu impresivnost *calculusa*, niti pak u njegovu pragmatičnu korist kao jednog od najsnažnijih oruđa novovjekovne fizike, naposljetku trebalo razotkriti dosljednost Boškovićeve dualnosti brzina s *tumačenjima* trenutne brzine koja daju Oresme i Boškovićevi suvremenici Euler i Maclaurin, kao i s definicijom trenutne brzine temeljem strogog cauchyjevskog utemeljenja *calculusa*.

Glede prvog postavljenog pitanja, valja odmah spomenuti kako unatoč tome što je za Aristotela ἐνέργεια uistinu ponajviše κίνησις, on također upozorava da gibanje ipak nije moguće definirati jednodimenzionalno samo kao zbiljnost, već kazuje da "ostvarenost [ozbiljenje] onoga što biva možnošću, kao takvo, jest *gibanje* (ἡ τοῦ δυνάμει ὄντος ἐντελέχεια, ᾗ τοιοῦτον, κίνησίς ἐστιν)".[13] Bez pretpostavljanja ove dvodimenzionalnosti, koja dakle uključuje kako zbiljnost tako i možnost (δύναμις), "čini se kako je gibanje neodređeno (ἀόριστον)", smatra Aristotel, budući se "ono ne može svrstati niti u mogućnost bića, niti u zbiljnost",[14] te tako za gibanje "preostaje da bude kao što je rečeno, i zbiljnost i ne-zbiljnost (καὶ ἐνέργειαν καὶ μὴ ἐνέργειαν)".[15] Boškovićeva dualnost brzina lako je uklopiva u ovakvo definiranje gibanja; aktualna brzina (kao ona koja pripada samoj zbiljnosti gibanja) ozbiljenje je onoga što biva možnošću – potencijalne brzine, koja kao

---

[10] *Meta*. 1047a32. Navodi iz Aristotelove *Metafizike* i *Fizike* prema Aristotel (1992a) i Aristotel (1992b), uz kratice *Meta.* i *Fiz.*

[11] Za iscrpan prikaz povijesti diferencijalnog (i integralnog) računa i njegova konceptualnog razvoja vidi Boyer (1949).

[12] Voltaire (1999), str. 81.

[13] *Fiz*. 201a10–11.

[14] *Meta*. 1066a17–19.

[15] *Meta*. 1066a24–26.

sklonost (*determinatio*) za aktualnu brzinu nije ništa drugo doli moguća zbiljnost samoga gibanja. Oko ovog aristotelovskog izvorišta svoga razlikovanja dviju brzinu i sâm je Bošković jasan, budući da kaže kako je njegova poraba pojma 'potencijalne' brzine rezultat izravnoga skolastičkog nasljeđa.[16] Još jasniji uvid u aristotelijansko-skolastičko izvorište Boškovićeve dualnosti brzina stječe se uzimajući u obzir sinonimne nazivke potencijalne i aktualne brzine – *velocitas in actu primo* i *velocitas in actu secundo*, kojima, kada ih rabi, Bošković također priznaje skolastičko nasljeđe.[17] *Actus primus* i *actus secundus*, naime, standardni su skolastički *termini technici* koji označuju Aristotelovo dvojako poimanje zbiljnosti (ἐντελέχεια), koje se razvija u *De anima* (412a27–28) temeljem definicije duše (ψυχή) kao "*prvog ozbiljenja* fizičkoga tijela koje možnošću ima život (ἡ ψυχή ἐστιν ἐντελέχεια ἡ πρώτη σώματος φυσικοῦ ζωὴν ἔχοντος)."[18] Primjerice, čovjek koji zna govoriti grčki ali šuti bio bi primjer prvoga ozbiljenja (*actus primus*), dok bi onaj koji zbiljski govori grčki bio primjer drugog ozbiljenja (*actus secundus*). Razvidno, prvo ozbiljenje je *vrsta možnosti* (tako je i brzina *in actu primo* vrsta možnosti), u našemu slučaju druge možnosti, dok bi dijete koje još ne govori grčki bilo slučaj prve možnosti u smislu da ono može naučiti grčki.[19] Ovu doktrinu o dvije vrste ozbiljenja preuzeti će i Leibniz kada u svojoj znanosti dinamike govori o dvije vrste 'sila', *vis viva* i *vis mortua*,[20] od kojih baštinimo suvremeno razlikovanje kinetičke i potencijalne energije; prve koja se pridružuje samome gibanju, druge tek kao mogućnosti samoga gibanja. Primjerice, luk napet strijelom predstavljao bi prvo ozbiljenje streličina gibanja, odnosno, moguću zbiljnost gibanja (potencijalna ἐνέργεια), dok bi izbačena strelica predstavlja drugo ozbiljenje njezina gibanja, odnosno zbiljnost samoga gibanja (kinetička ἐνέργεια).

Pripisujući brzini pri trenutku tek potencijalnu narav odnosno tvrdeći kako aktualna brzina ne može postojati pri trenutku vremena već uvijek u nekom neprekinutom gibanju i vremenu, Bošković također ide Aristotelovim stopama i u onoj domeni nauka o možnosti i zbiljnosti koji se tiče naravi samoga neprekinutoga gibanja, a posebno gibanja 'pri trenutku'. Naime, Aristotel smatra kako pri trenutku, odnosno pri *sada* (ἐώ τῷ νῦν), koje je vremenski analogon *nedjeljive* točke (usp. *De Caelo* 300a13–14; τὸ γὰρ νῦν τὸ ἄτομον οἷον στιγμὴ γραμμῆς ἐστίν: "jer nedjeljivo *sada* je nalik točki crte"), u strogome smislu ništa zbiljski niti se giblje niti miruje. Da gibanja naime

---

16 Bošković (1974), br. 64, str. 29.

17 *De viribus vivis*, Num. 11.

18 *De Anima* 412a27–28.

19 Talanga primjećuje kako je Bošković o skolastičkom razlikovanju dviju vrsta ozbiljenja mogao učiti iz propisanog udžbenika Joannes Baptista Ptolemaeusa *Philosophia mentis* dok je naukovao u Rimskom kolegiju. Vidi bilješku 82 na str. 204 u Bošković (1996).

20 Vidi Leibnizove spise "Brief Demonstration of a Notable Error of Descartes and Others Concerning a Natural Law…" u Loemker (1956), vol. I, str. 455–463 te "Specimen Dynamicum", Ibid., vol. II, str. 711–738.

nema pri *sada*, za Aristotela je razvidno iz sljedećeg.[21] Kada bi pri *sada* bilo gibanja, u njemu (ἐν αὐτῷ) bi se svakako moglo kretati i brže i sporije, pa bi ‘ono brže’ u *sada* prešlo dužinu *AB* koja će biti veća od dužine *AC*, koju prelazi ‘ono sporije’ (*AB*>*AC*). No budući je ‘ono sporije’ u cijelome *sada* prešlo *AC*, ‘ono brže’ bi dotičnu dužinu prešlo u manjem vremenu od *sada*. To bi pak značilo da je *sada* djeljivo, budući da postoji neki drugi ‘sada’ koji je manji od *sada*. Međutim, *ex hypothesi*, *sada* je nedjeljivo, te stoga Aristotel zaključuje kako pri *sada* nema gibanja. No, niti mirovanja nema u *sada*, jer “kazasmo kako mirovati može ono čemu je po naravi kretati se, ali se ne kreće *kad* mu je po naravi, *gdje* i *kako*; te tako, budući se u *sada* ništa ne kreće po naravi, bjelodano je kako ništa ne može mirovati”.[22] Da ni gibanja ni mirovanja nema pri *sada* vidljivo je i iz toga da “ako se isto *sada* nalazi u oba vremena, moguće je da se nešto kreće u cijelome jednome [vremenu] i miruje u cijelome drugom”, što bi pak bilo proturječje jer tako će se “dogodit da jedno te isto istodobno i kreće se i miruje; jer oba vremena imaju istu krajnost, naime: *sada*”.[23] Stoga se gibanje (i mirovanje) ne zbiva u jednom *sada* nego “je svako kretanje *u vremenu* (ἐν χρόνῳ), i u svakome vremenu moguće je kretati se”.[24] Boškovićev *dictum* “[*velocitas actualis*] *haberi non potest momento temporis*” i zahtjev za neprekinutim (konačnim) vremenom, odnosno, za nekim intervalom vremena u kojem se gibanje odvija a u kojem je moguće definirati zbiljsku brzinu, ovdje se sasvim dosljedno uklapa. Uostalom, i za Aristotela i za Boškovića,[25] vrijeme (χρόνος), u kojemu gibanja izvjesno ima, sastoji se od ‘vremena’ (intervala), a *sada* je, poput točke crte, *zbiljsko* samo kao granica prošlog i budućeg vremena (dvaju intervala). Kao takvo, međutim, *sada* “nije vrijeme, nego mu je prigodak”[26] i u vremenu “ono razdjeljuje možnošću”.[27] Pri *sada* tako svako svojstvo čija definicija zahtijeva neprekinuto vrijeme (kao što koncept brzine i zahtijeva) može postojati tek možnošću a ne zbiljnošću; odnos potencijalne i aktualne brzine odnos je možnosti i zbiljnosti, kao što je takav i odnos točke i crte i, primjerice, Leibnizove *vis mortua* i *vis viva* (mrtva i živa sila naime odnose se “kao točka prema crti ili kao crta prema ravnini”).[28]

Calculus differentialis, međutim, kao što je već naglašeno, ipak jednoznačno definira brzinu pri trenutku kao jedan sasvim koristan matematični i fizični *modus operandi*. Tako je za neko nejednoliko neprekidno gibanje materijalne točke dato funkcijom puta o vremenu $x(t)=kt^n$ (gdje je k konstanta

---

21 *Fiz*. 234a24–31

22 *Fiz*. 234a31–34.

23 Fiz. 234a35–b5.

24 *Fiz*. 232b20.

25 Vidi Bošković (1996), Num. 33.

26 *Fiz*. 220a22.

27 *Fiz*. 222a14–15.

28 Loemker (1956), vol. I, str. 458.

koja ovisi o jedinicama koje se rabe u mjerenju udaljenosti i vremena), trenutna brzina pri nekom proizvoljnom trenutku t data kao $v(t) = knt^{n-1}$. Opći postupak za dobijanje ove ‘trenutne brzine’ uključuje prvo pretpostavku (P_1) da je priraštaj (*incrementum*) neovisnoj varijabli t konačan ($\Delta t \neq 0$), iz čega se zatim izvodi (Z_1) prosječna brzina točke $v(\Delta t) = \Delta x / \Delta t$ u intervalu vremena Δt, gdje je $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$, odnosno, $\Delta x = k(t+\Delta t)^n - kt^n$. Zatim, nakon što se član $(t+\Delta t)^n$ u brojniku omjera razvije pomoću binomnog poučka i brojnik sredi dokidanjem članova kt^n te podijeli s Δt, dobijamo izraz s beskonačno mnogo članova $\bar{v}(\Delta t) = knt^{n-1} + k((n^2 - n) / 2)\Delta t t^{n-2} + \ldots$ Naposljetku, trenutna se brzina (Z_2) $v(t) = knt^{n-1}$ dobija pretpostavljajući (P_2) da je priraštaj neovisnoj izmjenjljivici strogo $\Delta t = 0$ te da se svi članovi koji ga sadrže nište, ili da je Δt dovoljno malen (infinitezimala) i da se svi članovi koji ga sadrže zanemaruju. Međutim, ovaj postupak dobijanja brzine pri trenutku $v(t) = knt^{n-1}$ povezan je s određenim logičkim i metodološkim poteškoćama.

Naime, kao što je to već dokazivao Berkeley u svojoj raspravi *The Analyst* iz 1734. godine, pretpostavke P_1 ($\Delta t \neq 0$) i P_2 ($\Delta t = 0$), koje se rabe u izvođenju zaključka Z_2 (trenutne brzine), međusobno su proturječne, te je upitno može li (Z_2) slijediti iz dviju proturječnih pretpostavki. Berkeleyevim riječima, “ukoliko se u težnji da se bilo koji iskaz dokaže pretpostavi nešto pomoću čega se dosegne nešto drugo, da bi se poslije sama pretpostavka uništila ili odbacila nekom suprotnom pretpostavkom, tada i sve što se doseglo i svaki posljedak takvog zaključivanja mora također biti nevaljao ili odbačen i od tada se više ne može pretpostavljati ili uporabljati u dokazivanju.”[29] Stoga Berkeley iščezavajuće priraste koje “niti su konačne veličine, niti veličine beskonačno male, no niti pak ništa” naziva “duhovima iščezlih veličina (*ghosts of departed quantities*)”,[30] duhovima koji dakako ne mogu strogo utemeljiti *calculus*. Što se pak tiče mogućnosti zanemarivanja priraštaja kao dovoljno malenih, Berkeley upozorava kako “ἀκρίβεια [preciznost, točnost] geometrije zahtijeva da ništa ne smije biti zanemareno ili odbačeno”.[31] Iako je Newton u svoje prve dvije inačice *calculusa*[32] priraštaje smatrao beskonačno malenima te tako zanemarivima ili pak jednostavno jednakima nuli,[33] u *De quadratura* će Newton jasno reći kako “greške u matematici ne smiju biti zanemarene, ma kako male bile (*errores quam minimi in rebus Mathema-*

[29] Fraser (1901), vol. III, §12, str. 25.

[30] Ibid., §35, str. 44.

[31] Ibid., §19, str. 28

[32] Newton daje tri inačice *calculusa*; prvu, metodu infinitezimala u *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (napisanu 1669, objavljenu 1711), drugu, metodu fluksija, u *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (n. 1671, o. 1736), te treću, metodu prvih i posljednjih omjera, u *De quadratura curvarum* (n. 1676, o. 1704).

[33] Primjerice, u *Methodus fluxionum* Newton kaže: “No gdjegod je [prirast] pretpostavljen kao beskonačno malen (…) članovi koji su s njime pomnoženi biti će ništa u poredbi s drugima, te ih stoga ja odbacujem…”; Whiteside (1969), vol. III, str. 81.

ticis non sunt contemnendi)”.[34] Newton će stoga sada matematičke veličine smatrati ne kao sastavljene od infinitezimalnih dijelova već *in statu nascendi*, odnosno, opisane neprekinutim gibanjem (*quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas hic considero*).[35] Shodno tome, Newton će uzeti da je priraštaj Δt neka *konačna veličina*, te će također formirati omjer $\Delta x / \Delta t$ za funkciju $x(t) = kt^n$, što naposljetku daje $\Delta x / \Delta t = knt^{n-1} + k((n^2 - n) / 2)\Delta t t^{n-2} + \ldots$ (vidi tekst prije). Međutim, sada Newton neće ništa zanemarivati niti ništiti, već će pustiti da se Δt *približava* nuli da bi naposljetku potpuno iščeznuo. Rezultirajući omjer $\Delta x / \Delta t = knt^{n-1}$ kada je $\Delta t = 0$, Newton naziva posljednji omjer (*ultima ratio*) iščezavajućih priraštaja (*evenescenta incrementa*), koji shvaća “ne kao omjer veličina prije nego li iščeznu, niti poslije, nego kao onaj s kojim iščezavaju”.[36] Shodno tome, posljednju brzinu (*ultima velocitas*), kao brzinu pri trenutku, Newton definira kao “brzinu kojom se tijelo giblje ne prije nego li stigne na to mjesto nit poslije toga, već kao brzinu pri samom trenutku stizanja”.[37] Metodom prvih i posljednjih omjera (koja nalikuje suvremenoj metodi *limesa*) Newton će doduše izbjeći Berkeleyevu prigovoru logičke nedosljednosti, no sada, čak i ako prihvatimo mogućnost postojanja nekog ‘posljednjeg omjera’ i pripisivanja neodređenu omjeru (0/0) neke određene vrijednosti (realnog broja), postavlja se pitanje kako tumačiti pripadajuću ‘posljednju brzinu’, budući da čitavo vrijeme na umu imamo koncept brzine koji ovisi o vremenskim i prostornim intervalima, a koji su sada doslovno iščezli.

Iako se o Newtonovim inačicama *calculusa* i njihovim tumačenjima općenito mnogo sporilo,[38] nas će ovdje zanimati pojašnjenje Newtonova ‘posljednjeg omjera’, a shodno tome i ‘posljednje brzine’, koje daje Euler u svojem *Institutiones calculi differentialis* (1755).[39] Naime, prema Euleru posljednji omjer iščezavajućih priraštaja uistinu je *eo ipso* neodređen (0/0); ukoliko pažnju usmjerimo samo na pojedini trenutak (gdje je dakako omjer puta i vremena 0/0), bez uzimanja u obzir susjednih smanjujućih intervala vremena, nemoguće je pripisati neku određenu graničnu vrijednost ‘posljednjem omjeru’ 0/0, pa tako ni vrijednost brzini ‘pri trenutku’. No, ukoliko čitavu stvar promatramo *in statu nascendi*, kako to Newton u *De quadratura* i promatra, tada

---

34 Whiteside (1981), vol. 8, str. 123.

35 Ibid., str. 121.

36 Cajori (1946), str. 39.

37 Ibid.

38 Jedno od pitanja je ono o sukladnosti triju Newtonovih inačica *calculusa*. Mi ovdje zastupamo tzv. standardno gledište prema kojem je Newtonova metoda fluksija zamjena za metodu infinitezimala, a metoda prvih i posljednjih omjera zamjena za metodu fluksija. O drugačijem viđenju Newtonovih inačica *calculusa*, prema kojem svaka od inačica ima posebno mjesto u cjelini Newtonova rada na *calculusu* (metoda fluksija kao njegovo heurističko zasnivanje, metoda prvih i posljednjih omjera kao njegovo strogo zasnivanje, a metoda infinitezimala kao skraćivanje strogog utemeljenja) vidi Kitcher (1973).

39 Euler (2000), posebno §83–§97.

prema Euleru *calculus* kao heuristička procedura može dati neku određenu vrijednost ovog 'posljednjeg omjera', odnosno on može ispitati način na koji se omjer mijenjao u približenju posljednjem omjeru i tako dati njegovu graničnu vrijednost, odnosno promjenu omjera iščezavajućih priraštaja do trenutka koji je u pitanju (omjer intervala puta i vremena za funkciju $x = kt^n$ kada $\Delta t \to 0$ naime različito se mijenja za različite n i tako različito 'doseže' granicu). No, kinematičko značenje ovog 'posljednjeg omjera' kao 'posljednje brzine' više ne može biti neka *zbiljska* brzina pri trenutku (budući da nema prostornih i vremenskih intervala), već postaje tek sklonost za gibanje *nakon* tog trenutka ukoliko više ne bi bilo same promjene brzine. Ovakvo tumačenje brzine 'pri trenutku' daje Oresme još u četrnaestom stoljeću, tumačeći trenutnu brzinu u smislu da što je veća ta brzina veća će biti i udaljenost prijeđena ukoliko bi se gibanje nastavilo jednoliko tom brzinom (*Verbi gratia; gradus velocitatis descensus est major, quo subjectum mobile magis descendit vel descenderet si continuaretur simpliciter*).[40] A Maclaurin će u raspravi *Treatise of fluxions* (1742), potaknut Newtonovim učiteljem Barrowom koji definira brzinu kao moć (*power*) kojom određeni prostor može biti prijeđen u nekom vremenu,[41] reći da "brzinu nejednolikog gibanja pri svakome trenutku vremena ne valja mjeriti prostorom koji je zbiljski prijeđen nakon tog trenutka u datom vremenu, već prostorom koji bi bio prijeđen ukoliko bi se gibanje nastavilo jednoliko nakon tog trenutka", te da ukoliko je trenutna brzina "podložna mjerenju, to je onda samo u tome smislu".[42] Ova su tumačenja, dakako, u potpunome suglasju s Boškovićevim razlikovanjem dviju vrsta brzina.[43]

Naposljetku, promislimo jedan dodatni mogući prigovor modalnosti brzina, naime, prigovor kako je strogo cauchyjevsko utemeljenje *calculusa*,[44] odnosno, definicija derivacije kao *granice* ili *limesa* beskonačnog niza diferencija učinilo prethodna tumačenja trenutne brzine tek nepotrebnim interpretativnim regresijama. U skladu s ovim strogim zasnivanjem *calculusa*, razmatrale bi se uzastopne vrijednosti omjera diferencija puta i vremena $\Delta x / \Delta t$, gdje se intervali Δx i Δt mogu po volji (neograničeno) smanjivati, što nam daje beskonačni niz vrijednosti srednjih brzina $\bar{v}(\Delta t)_1, \bar{v}(\Delta t)_2, \bar{v}(\Delta t)_3, \ldots, \bar{v}(\Delta t)_n, \ldots$ Što su manji intervali Δx i Δt, to će se omjer $\bar{v}(\Delta t)_n$ sve više približavati nekoj

[40] Wieleitner, (1914), str. 224.

[41] Maclaurin (1801), knjiga I, str. 54.

[42] Ibid., str. 53; O ulozi Maclaurina, kojega standardni prikazi povijesti *calculusa* uglavnom zaobilaze, vidi Grabiner (1997). O mogućim prigovorima Maclaurinovoj definiciji trenutne brzine (posebno o njezinoj kružnosti) vidi Guicciardini (1989), str. 44–45, te o njezinoj obrani Jesseph (1993), str. 282-283.

[43] Autoru ove bilješke nije poznato je li i u kojoj mjeri Bošković bio upoznat s Oresmeovim tumačenjem trenutne brzine kao potencijalne, kao i svojih suvremenika Maclaurina i Eulera, što bi svakako valjalo istražiti.

[44] Vidi "Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal" (1821), u Cauchy (1899), str. 13–257. O 'strogom zasnivanju' *calculusa* vidi također Grabiner (1981), Grabiner (1983).

fiksiranoj vrijednosti $v(t)$, odnosno, uzimajući n dovoljno velikim razlika $|v(t) - \bar{v}(\Delta t)_n|$ može se učiniti *proizvoljno malenom*. Preciznije izraženo, rabeći Cauchyjevu tzv. *delta-epsilon* definiciju,[45] možemo reći da je trenutna brzina $v(t)$ *limes* niza prosječnih brzina $\bar{v}(\Delta t)_1, \bar{v}(\Delta t)_2, \bar{v}(\Delta t)_3, \ldots, \bar{v}(\Delta t)_n, \ldots$ kada $\Delta t \to 0$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji takav $\delta > 0$ da iz $0 < |(\Delta t)_n| < \delta$ slijedi $|v(t) - \bar{v}(\Delta t)_n| < \varepsilon$. U ovoj strogo algebarskoj definiciji važno je primjetiti da se ne govori o dosezanju izmjenjljivice $\bar{v}(\Delta t)_n$ same granice $v(t)$, dakle, o dosezanju posljednjeg člana beskonačnog niza diferencija, te da stoga trenutnu brzinu $v(t) = \lim_{t \to 0}(x / t)$, odnosno, prihvaćajući Leibnizovu notaciju $v(t) = dt / dt$, ne valja pojmiti u smislu Newtonova 'posljednjeg omjera'. Stoga, kako to upozorava Boyer, trenutna brzina definirana na ovaj način tek kao *matematička apstrakcija* "nije brzina u uobičajenome smislu i ona nema svoju presliku u svijetu prirode, gdje ne postoji gibanje bez promjene položaja",[46] odnosno, "trenutna brzina *nema fizičke realnosti* (kurziv B. K.)".[47] Kao što to također sažimlje von Weizsäcker, "brzina kao diferencijalni kvocijent je *per definitionem* granična vrijednost. Da bi se ona definirala, mora se, dakle, promatrati jedan niz vremenskih intervala čija duljina opada. 'Prave', naime, mjerljive brzine su kvocijenti diferencija u nizu; granična vrijednost ne pripada nizu i tek će pomoću nominalne definicije biti nazvana 'brzinom u točki vremena *t*' (*Geschwindigkeit im Zeitpunkt*)".[48] Koliko god, dakle, uvjerljivo izgledalo da tijelo ima neku brzinu $v(t)$ pri trenutku t i koliko god standardni zapis dx/dt sugerirao omjer prostornih i vremenskih intervala, ova je brzina apstraktno definirani entitet, te kao takva nema zbiljsku narav i nije mjerljiva. Zbiljska brzina, kao ozbiljenje potencijalne brzine, zahtijeva neprekinuto vrijeme u kojem se odvija jednoliko gibanje i jedino u tome smislu brzina ima fizični smisao.

BIBLIOGRAFIJA

Aristotel 1992a. *Metafizika.* Prijevod: T. Ladan (Zagreb: Hrvatska sveučilišna naklada).
—. 1992b. *Fizika*. Prijevod: T. Ladan (Zagreb: Hrvatska sveučilišna naklada).

Bošković, R. 1974. *Teorija prirodne filozofije*. Prijevod: J. Stipišić (Zagreb: Sveučilišna naklada Liber).
—. 1996. *De continuitatis lege – O zakonu neprekinutosti*. Prijevod: J. Talanga (Zagreb: Školska knjiga).
—. 1745. *De viribus vivis dissertatio auctore P. Rogerio Josepho Boscovich. S. J. Matheseos Professore in Collegio Romano.* Romae MDCCXLV. Sumptibus Venantii Mondaldini Bibliopolae in Via Cursus. Typis Komarek. Hrvatski

[45] Cauchy (1899), str. 44.
[46] Boyer (1949), str. 7
[47] Ibid., str. 227.
[48] Weizsäcker (1974), str. 431–432.

prijevod: Josip Talanga, u: F. Zenko, *Starija hrvatska filozofija*, Hrestomatija filozofije, sv. 9, Školska knjiga, Zagreb 1997, str. 427–482.

Boyer, C. B. 1949. *The History of the calculus and its conceptual development* (New York: Dover).

Cajori, F (ur.). 1946. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Prijevod: A. Motte (Berkeley: University of California Press).

Cauchy, A. L. 1899. *Ouvres completes*, 2. niz, vol 4 (Paris: Gauthier-Villars).

Čuljak, Z. 1992. *Nastanak Boškovićeve filozofije prostora i vremena* (Zagreb: Hrvatsko filozofsko društvo).

Euler, L. 2000. *Foundations of differential calculus*. Prijevod: John D. Blanton (New York: Springer Verlag).

Fraser, A. C. 1901. *The Works of George Berkeley*, vol. III (Oxford: Clarendon Press).

Grabiner, J. V. 1981. *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus* (Cambridge, Massachusetts: MIT Press).

—. 1983. "Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the origins of Rigorous Calculus". *The American Mathematical Monthly* 90: 185–194.

—. 1997. "Was Newton's Calculus a Dead End?". *The American Mathematical Monthly* 104: 393–410.

Guicciardini, N. 1989. *The Development of the Newtonian Calculus in Britain: 1700–1800* (Cambridge: Cambridge University Press).

Jesseph, D. M. 1993. *Berkeley's Philosophy of Mathematics* (Chicago: University of Chicago Press).

Kitcher, P. 1973. "Fluxions, limits, and infinite littlenesse: A study of Newton's presentation of the calculus". *Isis* 64: 33–49.

Kutleša, S. 1994. *Prirodnofilozofijski pojmovi Ruđera Boškovića* (Zagreb: Hrvatsko filozofsko društvo).

Loemker, L. E. (ur.) 1956. *Gottfried Wilhelm von Leibniz: Philosophical Papers and Letters*, (Chicago: Chicago University Press), 2 vols.

Maclaurin, C. 1801. *Treatise on Fluxions. In Two Volumes* (London: William Baynes & William Davis).

Marković, ž. 1968. *Ruđe Bošković* (Zagreb: JAZU).

Voltaire, F-M.A. 1999. *Letters Concerning the English Nation* (Oxford: Oxford University Press).

Weizsäcker, C. F. 1974. *Die Einheit der Natur* (München: Deutscher Taschenbuch Verlag).

Whiteside, D. T. (ur.) 1968–1981. *Mathematical Papers of Isaac Newton.* 8. vols. (Cambridge: Cambridge University Press) .

Wieleitner, H. 1914. "Über den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme". *Bibliotheca Mathematica* 14: 193–243.

A Note on Bošković's Distinction between Two Kinds of Velocities

ABSTRACT: Bošković's distinction between two kinds of velocities (*duo velocitatum genera*) – velocity in the first act (*velocitas in actu primo*), or potential velocity (*velocitas potentialis*), and velocity in the second act (*velocitas in actu secundo*), or actual velocity (*velocitas actualis*) – is considered in respect to the concept of instantaneous velocity as defined by *calculus differentialis*. Contrary to the seeming inconsistency of Bošković's duality of velocities and the concept of instantaneous velocity, due to a critical examination of logical and methodological foundations of the *calculus,* the article shows that the duality of velocities is consistent with the interpretations of instantaneous velocity given by Oresme, Euler and Maclaurin, as with the definition of instantaneous velocity according to the rigorous Cauchyan founding of the *calculus*. Bošković's duality of velocities is also shown to be consistent with Aristotelian-scholastic doctrine of potentiality and actuality, especially in its domain related to the nature of continuous motion.

KEY WORDS: Bošković, velocity in the first act (*velocitas in actu primo*), potential velocity (*velocitas potentialis*), velocity in the second act (*velocitas in actu secundo*), actual velocity (*velocitas actualis*), Aristotle, potentiality, actuality, motion, calculus, instantaneous velocity.